

**02**  
**2018**

# Konstruktiver Ingenieurbau

## **Grundbau**

Bemessungsverfahren  
für Nagelwände

## **Stahlbetonbau**

Bauen im Bestand

## **Holzbau**

Tanken unter Holz

Paradiesische Zustände  
durch den Holzbau!

## **Stahlbau**

Aktueller Stand und Ausblick  
zu Dichtkästen ohne  
innenliegende Schweißnähte

## **Glasbau**

Zum statischen  
Nachweis von Mehrscheiben-  
Isolierverglasungen mit  
beliebig vielen Schichten

## **Bauphysik**

Wärmedämmsysteme  
für die Anwendung unter  
lastabtragenden  
Gründungsplatten



© defun - istockphoto.com



Marko Todorov, Frank Purtak

# Zum statischen Nachweis von Mehrscheiben-Isolierverglasungen mit beliebig vielen Schichten

In den vergangenen Jahren hat in Deutschland bei Gebäuden der Einbau von Mehrscheiben-Isolierverglasungen stetig zugenommen. Diese Entwicklung ist die logische Folge der notwendigen Energieeffizienz als Beitrag für den Klimaschutz. In der modernen Architektur kommen häufig schmale, geschosshohe Verglasungen zum Einsatz (Bild 1). Bemessungsrelevant sind hier neben den Windlasten auch die sogenannten Klimalasten, bestehend aus dem Druck- und Temperaturunterschied zum Produktionsort sowie dem jahreszeitlichen meteorologischen Luftdruckunterschied. Bei Horizontalverglasungen kommen noch Beanspruchungen aus Eigen- und Schneelasten hinzu.

Der praktisch tätige Ingenieur wird beim statischen Nachweis von Isolierverglasungen auf Standardsoftware zurückgreifen. Für unterschiedliche Geometrieformen und Belastungen führt im Speziellen die Analyse mit finiten Elementen immer zu Ergebnissen. Zur Kontrolle der Güte dieser Ergebnisse sind Plausibilitätsprüfungen als „Handrechnungen“ sehr sinnvoll, damit die Planungsleistungen auch dem ingenieurtechnischen Standard entsprechen.

Im folgenden Beitrag wird der theoretische Hintergrund für die Ermittlung der Beanspruchungen für beliebig viele Glasschichten von Mehrscheiben-Isolierverglasungen dargelegt und am Beispiel einer Dreischeiben-Isolierverglasung erläutert.



Bild 1: Fassade mit geschosshoher Verglasung

## Verwendete Bezeichnungen

$V$ [m <sup>3</sup> ], $T$ [K], $p$ [Pa]	Volumen, Temperatur, Druck
$T_p$ [K], $T_e$ [K]	Produktionstemperatur, Temperatur am Einbauort
$\Delta T = T_e - T_p$ [K]	Temperaturänderung;
$T_{0C} = 273,15 \text{ K} = 0^\circ\text{C}$	absolute Temperatur bei $0^\circ\text{C}$
$p_M = 101,325 \text{ kPa} = 1 \text{ atm}$	Druck auf Meereshöhe
$p_p$ [Pa], $p_e$ [Pa]	Produktionsdruck, Ortsdruck am Einbauort
$h$ [m]	Höhe über Meeresspiegel
SZR	Scheibenzwischenraum

Zur besseren Lesbarkeit von Glas und Gas wird in diesem Beitrag zwischen den Begriffen Glasschicht und Gaszwischenraum unterschieden.

### Grundlegende Beziehungen

Für Isolierverglasungen soll in einem abgeschlossenen Gaszwischenraum für Volumen, Druck sowie Temperatur die Beziehung nach der thermischen Zustandsgleichung des idealen Gases [1] gelten:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \text{const} = \chi \quad (1)$$

Wenn der Druck konstant ist ( $p = p_0$ ) gilt nach Gleichung (1):

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} = \text{const} \quad (2)$$

$$V = V_0 \frac{T}{T_0} \rightarrow \text{der 1. Satz von Gay-Lussac [1].} \quad (3)$$

Man kann Gleichung (2) in der Form

$$V = V_0(1 + \beta \cdot t) \quad (4)$$

aufschreiben. Wird ein Gas von 0°C auf t erwärmt, so nimmt sein Volumen von  $V_0$  auf V zu.

Hier ist  $\beta$  [1/K] der Ausdehnungskoeffizient des idealen Gases und hat annähernd den gleichen Wert für alle Gase:

$$\beta = \frac{1}{T_{0c}} = \frac{1}{273,15K} = 0,003661 K^{-1} \quad (5)$$

Wenn die Temperatur konstant ist ( $T = T_0$ ), gilt nach Gleichung (1):

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 \quad \text{oder} \quad (6)$$

$$p = p_0 \cdot \frac{V_0}{V} \quad (7)$$

Wenn das Volumen konstant ist ( $V = V_0$ ), gilt nach Gleichung (1):

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = \text{const} \quad (8)$$

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} \rightarrow \text{der 2. Satz von Gay-Lussac [1].} \quad (9)$$

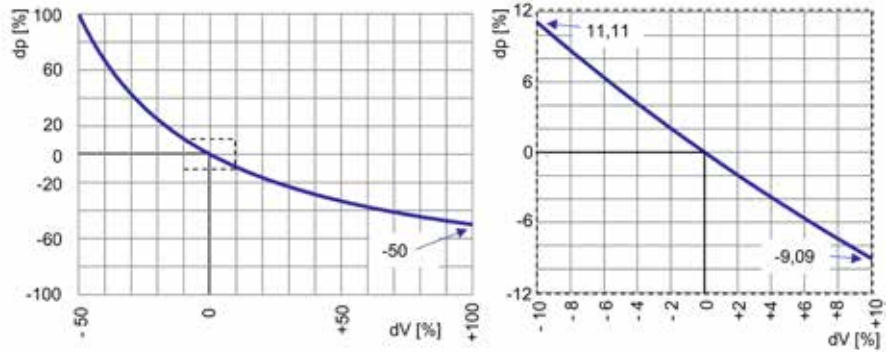


Bild 2: Volumen- und Druckänderung (mit Detailausschnitt)

Wenn jetzt in einem Gaszwischenraum mit konstantem Volumen die Produktionstemperatur  $T_p$  und der Produktionsdruck  $p_p$  bekannt sind, dann ergibt sich nach Gleichung (8) bei einer Temperaturänderung  $\Delta T$  die Druckänderung  $\Delta p$ :

$$\frac{p_p}{T_p} = \frac{p_p + \Delta p}{T_p + \Delta T} \quad \text{oder nach Umstellen} \quad (10)$$

$$\Delta p = p_p \cdot \frac{\Delta T}{T_p} \quad (11)$$

Wenn in einem geschlossenen Gaszwischenraum der Produktionsdruck  $p_p$  ist und sich das Volumen  $V_p$  um  $\Delta V$  ändert, dann ist die Druckänderung  $\Delta p$  nach Gleichung (6):

$$\Delta p = -p_p \cdot \frac{\Delta V_p}{V_p + \Delta V} \quad (12)$$

Aus der Beziehung (1) folgt mit einer Druckänderung  $\Delta p$  und Volumenänderung  $\Delta V$ :

$$\frac{(p + \Delta p) \cdot (V + \Delta V)}{T} = \text{const} = \chi$$

Umstellen nach der Druckänderung  $\Delta p$  führt zu:

$$\Delta p = \chi \frac{T}{(V + \Delta V)} - p$$

Nach weiterem Umstellen folgt die Abhängigkeit

$$\Delta p = -\frac{\Delta V}{(1 + \Delta V)}$$

Diese Gleichung symbolisiert eine Hyperbel (Bild 2).

Wenn sich das Volumen halbiert ( $\Delta V = -50$  %), so verdoppelt sich der Druck ( $\Delta p = 100$  %) und wenn sich das Volumen

verdoppelt ( $\Delta V = 100$  %), dann halbiert sich der Druck ( $\Delta p = -50$  %). Die Volumen- und Druckänderungen sind also nicht symmetrisch zum Nullpunkt.

Im Teilbereich der Volumenänderungen von  $\Delta V = -10$  % bis  $+10$  % ergeben sich Druckänderungen von  $\Delta p = 11,11$  bis  $-9,09$  %. Für den statischen Nachweis bedeutet dies, dass beispielsweise bei einer Höhendifferenz zwischen Produktions- und Einbauort von  $+300$  m bzw.  $-300$  m oder einer Temperaturänderung um  $+20$  K bzw.  $-20$  K die maximalen Verformungen und bemessungsrelevanten Hauptzugspannungen in den Glasschichten nicht identisch sein können (Bild 2).

Der atmosphärische Druck ist eine Funktion der Höhe  $h$  über dem Meeresspiegel. Die barometrische Höhenformel [1] lautet:

$$p(h) = p_M \cdot e^{\frac{-\rho_{ML} \cdot g \cdot h}{p_M}} \quad [\text{Pa}], \quad (13)$$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$  ... Erdbeschleunigung,  
 $\rho_{ML} = 1,293 \text{ kg/m}^3$  Luftdichte auf Meereshöhe bei einer Temperatur von 0°C

Nach [2] ist die internationale Höhenformel

$$p(h) = p_M \cdot \left(1 - \frac{0,0065 \cdot h}{288,15}\right)^{5,255} \quad [\text{Pa}] \quad (\text{gültig bis } 11000 \text{ m}). \quad (14)$$

Die Referenzhöhe ist die Meereshöhe und dort hat die Atmosphäre (internationale Standardatmosphäre) die mittlere Temperatur  $15^\circ\text{C} = 288,15 \text{ K}$  und den Luftdruck  $p_M = 101,325 \text{ kPa}$ . In der Formel (14) wird angenommen, dass der Temperaturgradient  $0,65 \text{ K pro } 100 \text{ m}$  ist.

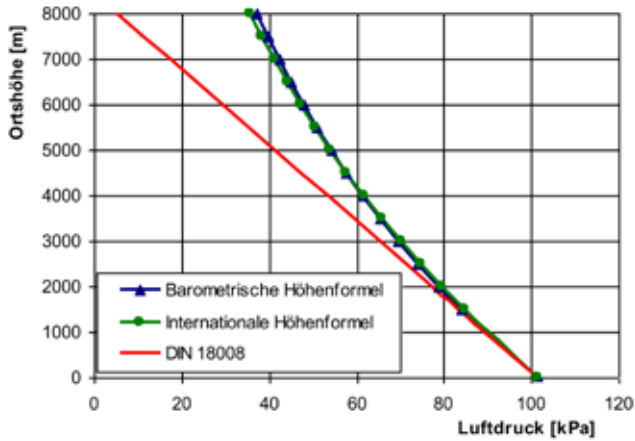


Bild 3: Atmosphärischer Druck nach Ortshöhe

Nach DIN 18008 [5] lässt sich der Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe vereinfacht mit folgender linearer Gleichung ermitteln:

$$\rho(h) = \rho_M - 0,012 \cdot h$$

[ $\rho_M$  in kPa,  $h$  in m]. (15)

Die Abweichungen sind für die praktische Nutzung unbedeutend, da für den Einbaubereich von Isolierverglasungen bis ca. 1500 m Höhe nach Bild 3 annähernd eine lineare Beziehung gilt.

### Druckberechnung für Isolierverglasungen

Wir betrachten beliebig viele Gaszwischenräume  $i$  bzw.  $j$ . Es wird angenommen, dass bei Produktion der Isolierverglasung und Schließen des Randverbundes in allen Gaszwischenräumen der Druck  $p_p$  [Pa] (Produktionsdruck) und die Produktionstemperatur  $T_p$  [K] herrschen und der Außendruck, der auf die innere und äußere Glasschicht wirkt, ebenfalls  $p_p$  ist. Unter diesen Bedingungen sind die Glasschichten frei von Spannungen und Verformungen. Die Volumina der Gaszwischenräume sind abgeschlossen.

Eine Veränderung des Druckes in den Gaszwischenräumen kann nur durch Deformation der Glasschichten oder durch Veränderung der Temperatur erfolgen.

Bei der Deformation der Glasschichten entsteht eine Volumenänderung  $\Delta V_i$  in den Gaszwischenräumen und dabei ändert sich deren Druck nach Gleichung (12) :

$$\Delta p_j = -p_p \cdot \frac{\Delta V_p}{V_p + \Delta V_i} \quad (j = i) \quad (16)$$

Bei einer Temperaturänderung um  $\Delta T_i$  und mit Annahme vollkommen starrer Glasschichten entstände eine Druckänderung  $\Delta p_j$  nach Gleichung (11) :

$$\Delta p_j = p_p \cdot \frac{\Delta T_i}{T_p} \quad (j = i) \quad (17)$$

Ist eine Druckänderung  $\Delta p_j$  für einen Gaszwischenraum bei starren Glasschichten vorgeschrieben, kann sie nur durch eine Temperaturänderung von

$$\Delta T_i = T_p \cdot \frac{\Delta p_j}{p_p} \quad (j = i) \quad (18)$$

entstanden sein, da sich das Volumen hierbei nicht ändern kann.

Die Anzahl der Gaszwischenräume sei  $n$ . Jede Formänderung der Isolierverglasung durch äußere Belastungen hat entsprechende Volumenänderungen  $\Delta V_i$  in den Gaszwischenräumen ( $i = 1 \dots n$ ) zur Folge.

Diese Volumenänderungen verändern auch den Druck in den Gaszwischenräumen, was wiederum zu einer Veränderung der Verformung führt. Es entsteht ein Iterationsprozess bis sich das Gleichgewicht des Systems einstellt. Die Temperaturänderungen  $\Delta T_i$  in den Gaszwischenräumen haben einen direkten Einfluss auf den Druck und werden in Gleichung (17) behandelt.

## Hohe Praxisrelevanz und nachvollziehbare Rechenbeispiele!



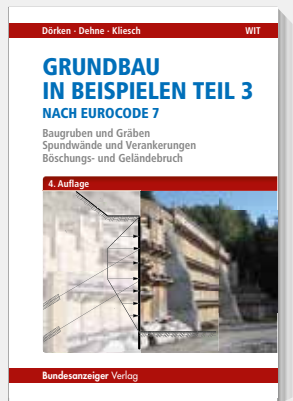
ISBN 978-3-8462-0590-7

6., überarbeitete und aktualisierte Auflage 2017, 490 Seiten, 17,0 x 24,0 cm, Buch (Softcover), 39,00 €



ISBN 978-3-8462-0592-1

6., überarbeitete und aktualisierte Auflage 2017, 426 Seiten, 17,0 x 24,0 cm, Buch (Softcover), 39,00 €



ISBN 978-3-8462-0594-5

4., überarbeitete und aktualisierte Auflage 2017, 440 Seiten, 17,0 x 24,0 cm, Buch (Softcover), 39,00 €

Die Buchreihe mit allen drei Teilen als günstiges Bundleangebot ISBN 978-3-8462-0596-9 | 98,00 €

Jetzt versandkostenfrei (deutschlandweit) bestellen:

[shop.bundesanzeiger-verlag.de](http://shop.bundesanzeiger-verlag.de)

Telefonisch: 0221/9 76 68-306 · Fax: 0221/9 76 68-236 und in jeder Fachbuchhandlung

 **Bundesanzeiger Verlag**

Damit diese nichtlineare Aufgabe für die Ermittlung des Druckes in den Gaszwischenräumen lösbar ist, muss man zuerst herausfinden, welche Volumenänderungen  $\Delta V_i$  in den Gaszwischenräumen entstehen, wenn der Druck im Gaszwischenraum ( $j = 1 \dots n$ ) um  $\Delta p_j$  erhöht wird. Dabei wird eine lineare Lösung der Aufgabe herangezogen.

Aus dem Verhältnis

$$\Delta V_{ij} = c_{ij} \cdot \Delta p_j \quad (19)$$

lassen sich die Konstanten  $c_{ij}$  [ $m^3 / Pa = m^5 / N$ ] berechnen, die als Nachgiebigkeitskoeffizienten zu betrachten sind.

Auf die äußeren Glasschichten wirken während der Lebensdauer verschiedene Lasten (Punkt-, Linien- und Flächenlasten), wie beispielsweise Wind-, Schnee-, Holmen-, und Personenlasten. Wir bezeichnen jede von diesen Lasten mit  $F_k$  ( $k = 1 \dots m$ ). Diese bewirken eine Volumenänderung  $\Delta V_i$  in jedem Gaszwischenraum  $i$ . Es gilt:

$$\Delta V_{ik} = c_{i,Fk} \cdot F_k \quad (20)$$

Auch hier sind die Konstanten als Nachgiebigkeitskoeffizienten zu bezeichnen. Ihre Dimension ist von der Dimension der Last  $F_k$  abhängig.

Als Vorbereitung für die Lösung der nichtlinearen Aufgabe werden zuerst folgende lineare Lösungen durchgeführt:

Tabelle 1: Parameter

Aufgabe	Bezeichnung	Beschreibung
1	$\Delta p_1$	Druck im Gaszwischenraum 1
...		
n	$\Delta p_n$	Druck im Gaszwischenraum n
n+1	$F_1$	Druck auf Außenglas von $1 \text{ kN/m}^2 = 1 \text{ kPa}$
n+2	$F_2$	Sog auf Innenglas von $1 \text{ kN/m}^2 = 1 \text{ kPa}$
n+3	$F_3$	Andere Glasbelastungen (z.B. Punktlasten)
n+4	$F_4$	Andere Glasbelastungen (z.B. Linienlasten)
n+5	$F_5$	Andere Glasbelastungen (z.B. Teilflächenlasten)
n+6	$F_6$	Lastbild (z.B. aus Punkt, Linien-, und Teilflächenlasten)

Unter den Aufgaben ist zu verstehen, dass jede einzelne Belastung separat oder wie bei Aufgabe n+6 ein komplettes Lastbild betrachtet wird.

In der Praxis werden zur Rechenzeitminimierung zumeist vereinfachend die Beanspruchungen für jede Belastung einzeln ermittelt und im Anschluss die geforderte Einwirkungs-Kombinatorik, z.B. nach aktueller Norm, durchgeführt. Allerdings ist streng genommen eine lineare Superposition der Ergebnisse ungenau, da jeder Einwirkungs-Kombination eine Nichtlinearität zugrunde liegt. Die geringen

Abweichungen sind jedoch in der Praxis in der Regel vernachlässigbar.

Die Nachgiebigkeitskoeffizienten  $c$  sind in Tabelle 2 eingetragen. Der Ortsdruck  $p_E$  am Einbauort sowie der Produktionsdruck  $p_p$  sind bekannt. Die Druckänderungen in Tabelle 2 sind damit

$$\Delta p_{au} = p_E - p_p \text{ auf das Außenglas und } \Delta p_{in} = -\Delta p_{au} \text{ auf das Innenglas.}$$

Die Druckänderungen in den Gaszwischenräumen  $\Delta p_j$  ( $j = 1 \dots n$ ) sind noch unbekannt.

Tabelle 2: Nachgiebigkeitsmatrix C

	$\Delta p_{j=1}$	.....	$\Delta p_n$	$F_{k=1} = \Delta p_{au}$	$F_2 = \Delta p_{in}$	$F_3$	....	$F_m$
$\Delta V_{i=1}$	$c_{1,1}$	...	$c_{1,n}$	$c_{1,F1}$	$c_{1,F2}$	$c_{1,F3}$	....	$c_{1,Fm}$
.....	...	....	....	....	....	....	....	....
$\Delta V_n$	$c_{n,1}$	.....	$c_{n,n}$	$c_{n,F1}$	$c_{n,F2}$	$c_{n,F3}$	....	$c_{n,Fm}$

Bezeichnet man die Volumenänderungen der Gaszwischenräume mit dem Vektor  $\Delta \mathbf{V} = \{\Delta V_1, \dots, \Delta V_n\}$  und die Lasten mit  $\mathbf{L} = \{\Delta p_1, \dots, \Delta p_n, F_1 = \Delta p_{au}, F_2 = \Delta p_{in}, F_3, \dots, F_m\}$ , so gilt  $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{L}$ . Die Matrix  $\mathbf{C}$  enthält alle Nachgiebigkeitskoeffizienten.

Die so erhaltenen Nachgiebigkeitskoeffizienten berücksichtigen jedoch nicht die Druckänderungen in den Gaszwischenräumen und die Übertragung des Druckes infolge der Volumenänderungen. Mit diesen wird aber die Iterationsprozedur aufgebaut, um den wahren Verformungszustand der Verglasung zu berechnen.

Ausgehend von der thermischen Zustandsgleichung (1):

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_P \cdot V_P}{T_P}$$

folgt für einen Gaszwischenraum i:

$$\chi_i = \frac{p_P \cdot V_i}{T_P} = \frac{(p_P + \Delta p_i) \cdot (V_i + \Delta V_i)}{(T_P + \Delta T_i)}$$

wobei

- $\Delta T_i$  eine vorgeschriebene Temperaturänderung,
- $\Delta p_i$  die unbekannte Druckänderung bezogen auf den Produktionsdruck und
- $\Delta V_i$  die Volumenänderung infolge der Belastungsänderung ist.

Für die Volumenänderung gilt für jeden Gaszwischenraum  $i = 1 \dots n$ :

$$\Delta V_i = \sum_{j=1}^n (c_{i,j} \cdot \Delta p_j) + c_{i,F1} \cdot \Delta p_{au} + c_{i,F2} \cdot \Delta p_{in} + \sum_{k=3}^m (c_{i,Fk} \cdot F_k) \quad (23)$$

Die Gleichung (22) lässt sich mit den Ausdrücken

$$\varepsilon_{Pi} = \frac{\Delta p_i}{p_P}; \quad \varepsilon_{Vi} = \frac{\Delta V_i}{V_i}; \quad \varepsilon_{Ti} = \frac{\Delta T_i}{T_P}$$

umformen in:

$$(1 + \varepsilon_{Pi})(1 + \varepsilon_{Vi}) = (1 + \varepsilon_{Ti})$$

für  $\varepsilon_{Vi}$  gilt mit Gleichung (23):

$$\varepsilon_{Vi} = \frac{\sum_{j=1}^n (c_{i,j} \cdot \Delta p_j)}{V_i} + \frac{c_{i,F1} \cdot \Delta p_{au} + c_{i,F2} \cdot \Delta p_{in} + \sum_{k=3}^m (c_{i,Fk} \cdot F_k)}{V_i}$$

unbekannter Term + bekannter Term

Mit der Substitution

$$\beta_{i,j} = \frac{c_{i,j} \cdot p_P}{V_i}$$

und dem bekannten Term

$$\varepsilon_{Fi} = \frac{c_{i,F1} \cdot \Delta p_{au} + c_{i,F2} \cdot \Delta p_{in} + \sum_{k=3}^m (c_{i,Fk} \cdot F_k)}{V_i} \quad (27)$$

ergibt sich eine vereinfachte Darstellung für  $\varepsilon_{Vi}$ :

$$\varepsilon_{Vi} = \sum_{j=1}^n (\beta_{i,j} \cdot \varepsilon_{Pj}) + \varepsilon_{Fi} \quad (28)$$

Setzt man Gleichung (28) in (24) ein, so folgt:

$$(1 + \varepsilon_{Pi})(1 + (\sum_{j=1}^n (\beta_{i,j} \cdot \varepsilon_{Pj}) + \varepsilon_{Fi})) = (1 + \varepsilon_{Ti}) \quad (29)$$

und man bekommt für den Gaszwischenraum i eine Gleichung mit dem unbekanntem Parameter  $\varepsilon_{pi}$ :

$$\varepsilon_{Pi} \sum_{j=1}^n (\beta_{i,j} \cdot \varepsilon_{Pj}) + \sum_{j=1}^n (\beta_{i,j} \cdot \varepsilon_{Pj}) + \varepsilon_{Pi}(1 + \varepsilon_{Fi}) = \varepsilon_{Ti} - \varepsilon_{Fi} \quad (30)$$

Für jeden Gaszwischenraum ( $i = 1 \dots n$ ) wird eine solche Gleichung aufgestellt und es entsteht ein nichtlineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten  $\varepsilon_{pi}$ . Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die Werte von  $\varepsilon_{pi}$  und es lassen sich damit die Druckverhältnisse in jedem Gaszwischenraum berechnen:

$$\Delta p_i = \varepsilon_{Pi} \cdot p_P$$

(24) Für ausschließlich nur einen einzigen Gaszwischenraum bekommt die Gleichung (30) nach Umstellen die Gestalt einer quadratischen Gleichung. Streicht man noch den Fußzeiger  $i = 1$  für den ersten Gaszwischenraum, folgt:

$$\beta_1 \cdot (\varepsilon_P)^2 + (1 + \varepsilon_F + \beta_1) \cdot \varepsilon_P + (\varepsilon_F - \varepsilon_T) = 0 \quad (25)$$

Als Lösung der quadratischen Gleichung gilt:

$$\varepsilon_P = \frac{-(1 + \varepsilon_F + \beta_1) + \sqrt{(1 + \varepsilon_F + \beta_1)^2 - 4 \cdot \beta_1 \cdot (\varepsilon_F - \varepsilon_T)}}{2 \cdot \beta_1}$$

Der Druck im Gaszwischenraum ist dann:

$$\Delta p = \varepsilon_P \cdot p_P \quad (26) \quad (31)$$

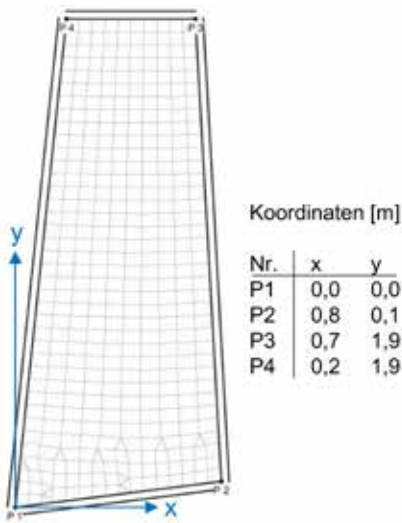


Bild 4: Beispiel FE-Vernetzung mit polygonaler Geometrie

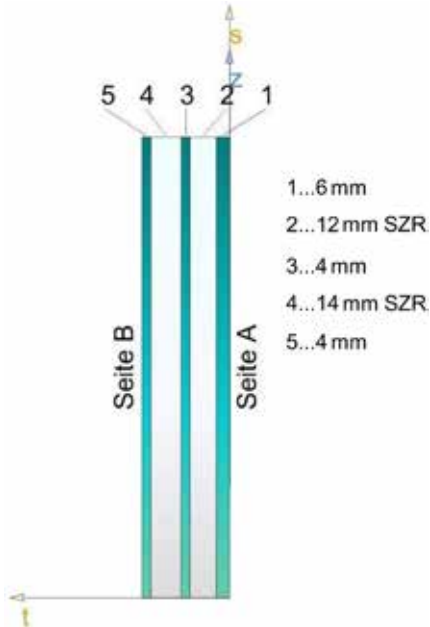


Bild 5: Schichtenaufbau von Seite A zur Seite B

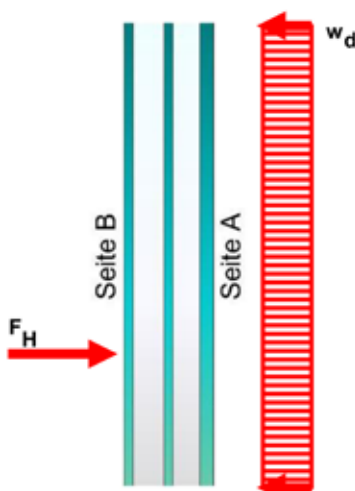


Bild 6: Belastungen auf die Isolierverglasung

### Beispiel Dreischeiben-Isolierverglasung

#### System

Die Verglasungseinheit hat einen polygonalen Rand und eine Fläche von  $A = 1,2 \text{ m}^2$  und ist allseitig gelenkig gelagert (Bild 4). Der Schichtenaufbau ist mit 6ESG/12SZR/4ESG/14SZR/4ESG (Bild 5) festgelegt.

Für die Produktionsbedingungen wird angenommen, dass die Herstellung der Verglasungseinheit bei  $p_p = 1 \text{ atm} = 101,325 \text{ kPa}$  (Höhe auf Meeresspiegelniveau  $h_p = 0,0 \text{ m}$ ) erfolgt. Die Herstelltemperatur beträgt  $20^\circ\text{C}$ , womit die absolute Temperatur  $T_p = T_{oc} + 20^\circ\text{C} = 293,15 \text{ K}$  ist. Die Volumina der Gaszwischenräume sind bei Produktion  $V_p: V_1 = A \times 0,012 = 0,0144 \text{ m}^3, V_2 = A \times 0,014 = 0,0168 \text{ m}^3$ .

#### Belastungen

- Als Belastungen (Bild 6) werden angesetzt:
- Winddruck auf Seite A,
  - Klimalasten (bestehend aus Temperaturänderung, Höhen- und Luftdruckunterschied) sowie
  - Einzellast auf Seite B.

#### Volumenänderung unter Einheitslasten

Für die zu untersuchenden Belastungen ergeben sich mit den dazugehörigen Einheitslasten mit TW Glas [7] die Volumenänderungen bei Verformung der Glasschichten (Tabelle 3):

- $\Delta p_{1,2} \dots$  Druck in den Gaszwischenräumen 1 und 2
- $\Delta q_{au} \dots$  Druck auf die Außenscheibe (Seite A)
- $\Delta q_{in} \dots$  Sog auf die Innenscheibe (Seite B)
- $w_d \dots$  Winddruck auf die Außenscheibe (Seite A)
- $F_H \dots$  Einzellast auf die Innenscheibe (Seite B)

Mit bekannter Verformung der Glasschichten ergeben sich die Volumenänderungen in den Gaszwischenräumen  $i = 1$  und  $2$  nach Tabelle 4. Beispielsweise verringert sich unter der Drucklast von  $p_{au} = 1 \text{ kN/m}^2$  gegen die Glasschicht 1 das Gasvolumen im SZR 1 um  $0,0009 \text{ m}^3$ .

Tabelle 3: Volumenänderung [m³] nach Verformung der Glasschichten aus Belastung

	1...Glas t = 6 mm Seite A	2...Glas t = 4 mm in Mitte	3...Glas t = 4 mm Seite B
$p_{j=1} = 1 \text{ kN/m}^2$	-0,000900	0,003037	0
$p_{j=2} = 1 \text{ kN/m}^2$	0	-0,003037	0,003037
$p_{au} = 1 \text{ kN/m}^2$ (Seite A)	0,000900	0	0
$p_{in} = 1 \text{ kN/m}^2$ (Seite B)	0	0	0,003037
$w_d = 0,5 \text{ kN/m}^2$ (Seite A)	0,000450	0	0
$F_H = -0,5 \text{ kN}$ (Seite B)	0	0	-0,002966

Tabelle 4: Volumenänderung [m<sup>3</sup>] in den Gaszwischenräumen unter Einheitsbelastung

	$\Delta V_1$	$\Delta V_2$
$p_{j=1} = 1 \text{ kN/m}^2$	0,003937	-0,003037
$p_{j=2} = 1 \text{ kN/m}^2$	-0,003037	0,006074
$p_{au} = 1 \text{ kN/m}^2$ (Seite A)	-0,000900	0
$p_{in} = 1 \text{ kN/m}^2$ (Seite B)	0	0,003037
$w_d = 0,5 \text{ kN/m}^2$ (Seite A)	-0,000450	0
$F_H = -0,5 \text{ kN}$ (Seite B)	0	-0,002966

Mit den berechneten Volumenänderungen ergibt sich die Nachgiebigkeitsmatrix C nach

Tabelle 5 bzw. mit Zahlenwerten für das Beispiel nach Tabelle 6.

Tabelle 5: Nachgiebigkeitsmatrix C

	$\Delta p_{j=1}$	$\Delta p_{j=2}$	$F_{k=1} = \Delta p_{au}$	$F_{k=2} = \Delta p_{in}$	$F_3 = w_d$	$F_4 = F_H$
$\Delta V_{i=1}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{1,F1}$	$c_{1,F2}$	$c_{1,F3}$	$c_{1,F4}$
$\Delta V_{i=2}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,F1}$	$c_{2,F2}$	$c_{2,F3}$	$c_{2,F4}$

Tabelle 6: Nachgiebigkeitsmatrix C mit Zahlenwerten

	$\Delta p_{j=1}$	$\Delta p_{j=2}$	$F_{k=1} = \Delta p_{au}$	$F_{k=2} = \Delta p_{in}$	$F_3 = w_d$	$F_4 = F_H$
$\Delta V_{i=1}$	0,003937	-0,003037	-0,000900	0	-0,000450	0
$\Delta V_{i=2}$	-0,003037	0,006074	0	0,003037	0	-0,002966

Somit ergibt sich beispielsweise der Nachgiebigkeitswert  $c_{1,1} = \Delta V_{1,1} / \Delta p_1 = 0,003937 \text{ m}^3/\text{kPa}$  und nach Gleichung (26) für  $\beta_{1,1} = c_{1,1} \times p_p / V_1 = 0,003937 \times 101,325 / 0,0144 = 27,7$ .

**Belastung: Winddruck**

Es wird  $\Delta T = \Delta p_{in} = \Delta p_{au} = 0$  gesetzt und auf das Außenglas (Seite A) wirkt ausschließlich der Winddruck von  $w_d = 0,5 \text{ kN/m}^2$ .

Mit

$$c_{1,F3} = \frac{\Delta V_{1,F3}}{w_d} = \frac{-0,00045}{0,5} = -0,0009 \frac{\text{m}}{\text{kN}}$$

folgt aus Gleichung (27) für den

Gaszwischenraum  $i = 1$ :

$$\varepsilon_{F1} = \frac{c_{1,F3} \cdot w_d}{V_1} = -0,03749$$

und den Gaszwischenraum  $i = 2$ :

$$\varepsilon_{F2} = 0$$

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (30) mit 2 Gleichungen für  $\varepsilon_{pi}$  liefert die beiden unbekanntenen Druckänderungen  $\Delta p_j$  in den Gaszwischenräumen (Tabelle 7). Mit dem bekannten Produktionsdruck  $p_p$  ergibt sich für den Gaszwischenraum 1 der Differenzdruck  $\Delta p_1 = \varepsilon_{p1} \cdot p_p = 1,707 \times 10^{-3} \times 101,325 = 0,172 \text{ kPa}$ .

Tabelle 7: Lösung Gleichungssystem (30) mit Druckdifferenzen

Gaszwischenraum	$\varepsilon_{pi}$	$\Delta p_j$
1	0,001707	0,172 kPa
2	0,000831	0,084 kPa

Bei der Belastung mit Winddruck ist die Volumenänderung in den Gaszwischenräumen nach Gleichung (23) :

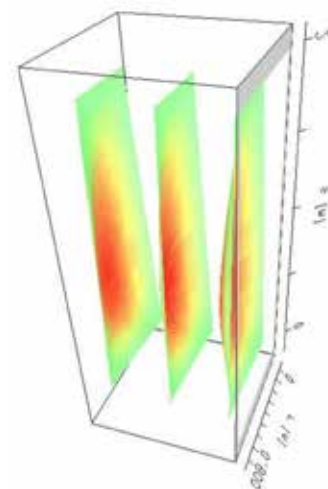
$$\Delta V_1 = c_{1,1} \cdot \Delta p_1 + c_{1,2} \cdot \Delta p_2 + c_{1,F3} \cdot w_d = -2,45e^{-5} \text{ m}^3 \text{ bzw.}$$

$$\Delta V_2 = c_{1,1} \cdot \Delta p_1 + c_{1,2} \cdot \Delta p_2 = -1,4e^{-5} \text{ m}^3.$$

Mit bekannter Verformung (Bild 7) werden die zugehörigen Spannungen in den Glasschichten berechnet und der Nachweis nach Norm geführt.

**Belastung: Ortsdruck am Einbaort (Höhenunterschied)**

Die Verglasungseinheit wird in 300 m Höhe eingebaut. Der Ortsdruck sinkt mit  $p_e(h) = 101,325 - 0,012 \times 300$  auf 97,725 kPa. Damit ergibt sich eine Druckänderung zwischen Produktions- und Einbaort von  $\Delta p = p_e - p_p = -3,6 \text{ kPa}$ , die unter Berücksichtigung der Vorzeichendefinition eine Flächenbelastung auf die Außenscheibe (Seite A) von  $q_{au} = -3,6 \text{ kN/m}^2$  und auf die Innenscheibe (Seite B) von  $q_{in} = 3,6 \text{ kN/m}^2$  bewirkt. Die Nachgiebigkeitsmatrix ist schon bekannt.



max. Verformungen +0,59 mm

Bild 7: Verformungen der Isolierverglasung aus Winddruck auf Seite A



**Tabelle 8: Lösung Gleichungssystem (30) mit Druckdifferenzen**

Gaszwischenraum	$\epsilon_{pi}$	$\Delta p_j$
1	-0,03230	-3,273 kPa
2	-0,03296	-3,340 kPa

Bild 8 zeigt die Verformungen für die Höhenunterschiede von +300 m bzw. -300 m.

Um beim Transport von Isolierverglasungen über große Höhenunterschiede bis zum Einbauort (z.B. Transport über die Alpen) Glasbruch auszuschließen, sind gegebenenfalls Druckausgleichsventile vorzusehen, welche erst am Einbauort geschlossen werden. In diesem Fall entfällt der Nachweis für diesen Lastfall.

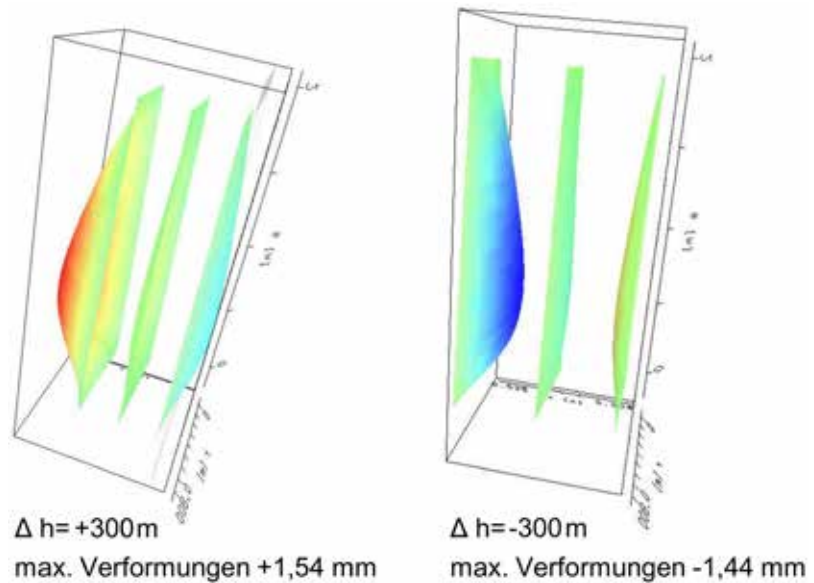


Bild 8: Verformungen der Isolierverglasung aus Höhenunterschied

**Belastung: Meteorologischer Luftdruckunterschied**

Nach DIN 18008 werden folgende Werte angesetzt:

- Sommer: + 4 kPa
- Winter: - 2 kPa

Die Berechnung ist auf gleiche Weise wie bei Druck aus Ortshöhendifferenz zu ermitteln, nur dass im Beispiel anstatt  $q = 3,6 \text{ kN/m}^2$  hier für den Sommerfall  $4 \text{ kN/m}^2$  bzw. für den Winterfall  $2 \text{ kN/m}^2$  anzusetzen sind.

**Belastung: Temperatur**

In den beiden Gaszwischenräumen soll jeweils ein Temperaturanstieg von  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T = 20^\circ \text{ C}$  wirken. Bei konstantem Volumen ergibt sich für die Gaszwischenräume eine Druckänderung zum Produktionsdruck nach Gleichung (11) bei Annahme starrer Glasschichten von:

$$\Delta p_{1p} = \Delta p_{2p} = \frac{p_p}{T_p} \cdot \Delta T = \frac{101,325}{293,15} \cdot 20$$

$$= 0,3456 \cdot 20 = 6,912 \text{ kPa}$$

Nach DIN 18008 gilt die vereinfachte Beziehung:  $\Delta p = 0,34 \cdot \Delta T$  unabhängig von der Höhe des Produktionsstandortes.

Wegen der Volumenänderung aus der Glasverformung werden die Drücke in den Gaszwischenräumen aber wesentlich kleiner sein, welche mit dem Gleichungssystem (30) zu ermitteln sind.

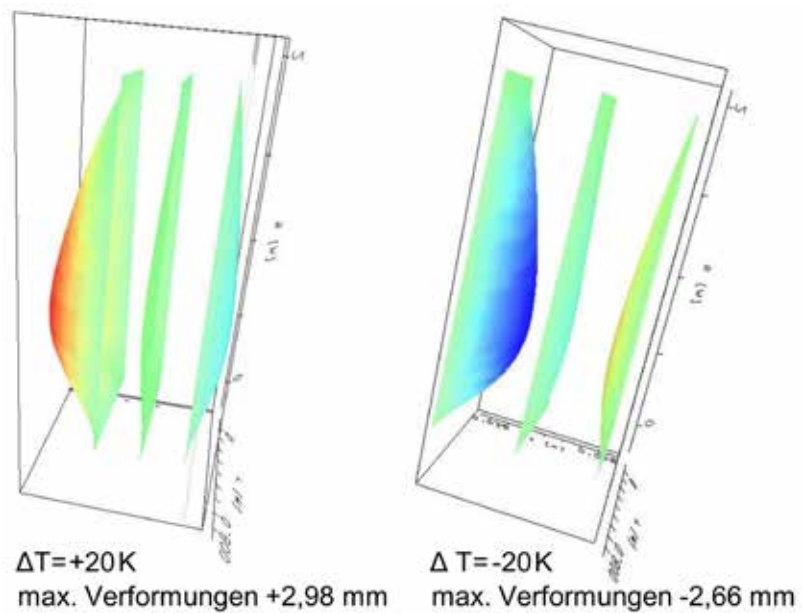


Bild 9: Verformungen der Isolierverglasung aus Klimalast: Temperatur

Das Temperaturverhältnis ist

$$\varepsilon_{T1} = \varepsilon_{T2} = \frac{\Delta T}{T_p} = \frac{20}{293,15} = 0,068$$

und wegen nicht vorhandener Lasten oder Druckdifferenzen folgt mit Gleichung (27)

$\varepsilon_{F1} = \varepsilon_{F2} = 0$ . Mit Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erhält man  $\varepsilon_{pi}$  für die Gaszwischenräume nach Tabelle 9.

Daraus folgen mit Gleichung (31) die Druckzustände in den beiden Gaszwischenräumen:

$$\Delta p_1 = \Delta p_{1p} + \varepsilon_{p1} \cdot p_p = 6,912 - 6,165 \text{ kPa} = 0,747 \text{ kPa}$$

$$\Delta p_2 = \Delta p_{2p} + \varepsilon_{p2} \cdot p_p = 6,912 - 6,294 \text{ kPa} = 0,618 \text{ kPa}$$

**Tabelle 9: Lösung Gleichungssystem (30) mit Druckdifferenzen**

Gaszwischenraum	$\varepsilon_{pi}$	$\Delta p_j$
1	-0,0608	0,747 kPa
2	-0,0621	0,618 kPa

Bei diesem Überdruck (bezogen auf den Produktionsdruck) ist die Volumenänderung in den Gaszwischenräumen nach Gleichung (23):

$$\Delta V_1 = 1,06 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ (7,4 \%)} \text{ und}$$

$$\Delta V_2 = 1,48 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ (8,8 \%)}.$$

In Bild 9 sind die Verformungen unter Temperaturveränderung dargestellt.

Für die Lastfälle zeigt Tabelle 10 die Lastanteile pro Glasschicht. Die Summe der Lastanteile aller Glasschichten muss mit den Gasdrücken in den Scheibenzwischenräumen beispielsweise für Winddruck 0,5 kN/m<sup>2</sup> betragen. Für Höhendifferenzen oder Temperaturunterschiede ist die Summe Null, da keine äußeren Lasten angreifen.

**Belastung: Einzellast**

Es wird  $\Delta T = \Delta p_{in} = \Delta p_{au} = 0$  gesetzt und auf das Innenglas (Seite B) wirkt nur eine Druckkraft  $F_H = -0,5 \text{ kN}$  an der Stelle ( $x; y = 0,4; 0,6 \text{ m}$ ).

Aus den Nachgiebigkeitswerten

$$c_{1,F4} = 0 \text{ und}$$

$$c_{2,F4} = \frac{\Delta V_{2,F4}}{F_H} = \frac{-0,003}{-0,5} = 0,006 \frac{\text{m}^3}{\text{kN}}$$

folgen die Werte der Druckdifferenzen in den Gaszwischenräumen nach Tabelle 11.

**Tabelle 11: Lösung Gleichungssystem (30) mit Druckdifferenzen**

Gaszwischenraum	$\varepsilon_{pi}$	$\Delta p_j$
1	0,00548	0,555 kPa
2	0,00736	0,746 kPa

Bei dieser Belastung aus der Einzellast ist die Volumenänderung in den Gaszwischenräumen nach Gleichung (23) zu ermitteln:

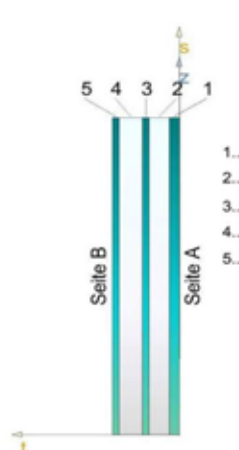
$$\Delta V_1 = c_{1,1} \cdot \Delta p_1 + c_{1,2} \cdot \Delta p_2 \text{ bzw.}$$

$$\Delta V_2 = c_{1,1} \cdot \Delta p_1 + c_{1,2} \cdot \Delta p_2 + c_{2,F4} \cdot F_H$$

In Bild 10 ist die Verformung der drei Glasschichten infolge Einzellast dargestellt.

**Tabelle 10: Lastanteile in [kN/m<sup>2</sup>] auf die Glasschichten (vorzeichenbehaftet)**

Lastfall	Seite A 6 mm	Mitte 4 mm	Seite B 4 mm	Summe
wd = 0,5 kPa (pos. in t-Richtung Druck auf A)	0,500	0,000	0,000	
	-0,172	0,172		
		-0,084	0,084	
	<b>0,328</b>	<b>0,088</b>	<b>0,084</b>	<b>0,500</b>
dh = + 300m	-3,600	-3,273	3,600	
	3,273	3,339	-3,339	
		-0,327	0,066	0,261
dh = - 300m	3,600	3,292	-3,600	
	-3,292	-3,354	3,354	
	0,308	-0,062	-0,246	0,000
dT = + 20K	-0,747	0,747		
		-0,618	0,618	
	-0,747	0,129	0,618	0,000
dT = - 20K	0,664	-0,664		
		0,551	-0,551	
	0,664	-0,113	-0,551	0,000



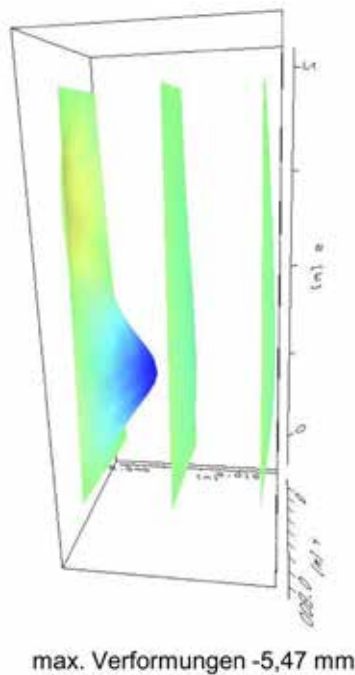


Bild 10: Verformungen der Isolierverglasung aus Einzellast auf Seite B

## Zusammenfassung

Für Mehrscheiben-Isolierverglasungen mit sowohl beliebigem Grundriss als auch Schichten- und Aufbaufolge ist für den statischen Nachweis der Glasdicken der Druckzustand in den Gaszwischenräumen maßgebend. Bei beliebiger Belastung (z.B. Punkt-, Linien- Flächenlasten) wird sich der Druck in den Scheibenzwischenräumen entsprechend der Bedingungen aus Höhenlage, Temperatur und meteorologischem Luftdruckunterschied einstellen. Für die Berechnung der Drücke in den Gaszwischenräumen ( $i = 1 \dots n$ ) wird ein nichtlineares Gleichungssystem mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten hergeleitet. Für den Aufbau des Gleichungssystems wird eine lineare Lösung mit allen Belastungen verwendet, wobei die Steifigkeitsverhältnisse der Glasschichten (auch aus VSG) in die Berechnung eingehen. Die Lösung liefert die vorhandenen Drücke in den Gaszwischenräumen. Mit nun bekannter Gesamtbelastung ist der statische Nachweis für eine beliebige Geometrie mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode möglich.

An einem Beispiel einer polygonalen Dreifach-scheiben-Isolierverglasung werden die Beziehungen mit Zahlenwerten angewendet. Die Verformungen der Verglasungseinheit werden für relevante Lastfälle grafisch dargestellt.

## Literatur

- [1] Stroppe, H.: Physik für Studenten der Natur- und Technikwissenschaften. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987.
- [2] wikipedia.org/wiki/Barometrische\_Höhenformel.
- [3] Feldmeier, F.: Zur Berücksichtigung der Klimabelastung bei der Bemessung von Isolierglas bei Überkopfverglasung. Stahlbau 65 (1996) H.8; Ernst & Sohn; S. 285–290.
- [4] Feldmeier, F.: Klimabelastung und Lastverteilung bei Mehrscheiben-Isolierglas. Stahlbau 75 (2006) H.6; Ernst & Sohn; S. 467–478.
- [5] DIN 18008-1 (12/2010): Glas im Bauwesen – Bemessungs- und Konstruktionsregeln – Teil 1: Begriffe und allgemeine Grundlagen. DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
- [6] DIN 18008-2 (12/2010): Glas im Bauwesen – Bemessungs- und Konstruktionsregeln – Teil 2: Linienförmig gelagerte Verglasungen. DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
- [7] TW Glas (Version 2018): Berechnungsprogramm für Verglasungen. TragWerk Software, Dresden.
- [8] DIN EN 1990:2010-12 Eurocode 0: Grundlagen der Tragwerksplanung. Deutsche Fassung EN 1990:2002 + A1:2005 + A1:2005/AC:2010, NA-Bau im Deutschen Institut für Normung e.V.



**Prof. Dr.-Ing. Marko Todorov**

Universität Ruse in Bulgarien

mtodorov@uni-ruse.bg



**Dr.-Ing. Frank Purtak**

Trag Werk Ingenieure  
Döking+Purtak Partnerschaft  
Prellerstraße 9, 01309 Dresden  
Telefon: 0351/ 433 08 50

fp@tragwerk-ingenieure.de